

MAI – 10.cvičení (11.12.2014) - limita, spojitost a derivace funkce.

Definice limity funkce a výpočet limit funkcí – příklady z minulého cvičení a dále:

($\log x$ je přirozený logaritmus, $\exp(x) = e^x$)

1. Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují (limita složené funkce) :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 - \frac{2}{x}\right).$$

b) Definujme $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \cdot \log f(x))$. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$.

2. Definujte a vyšetřete vlastnosti funkce inverzní k funkci

a) $\sin x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (fce $\arcsin x$); b) $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (fce $\operatorname{arctg} x$).

3. Limity s cyklometrickými funkcemi $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

7. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

(i) $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; (ii) $f(x) = \frac{\ln(4x^2 + 1)}{x^2}$; (iii) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Výpočet derivace funkce .

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$$f(x) = : \frac{1}{x} + 4x^2; \quad \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}; \quad x + \sin x; \quad x^2 \sin x; \quad x \ln(x-3); \quad \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \frac{x^3}{x^2-1}; \quad \frac{2}{(x^3-2)^2};$$

$$x - 2 \operatorname{arctg} x;$$

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}; \quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2; \quad \sqrt{1+\sin 4x}; \quad \cos \sqrt{x}; \quad x^2 e^{-x}; \quad e^{\frac{1}{x}} - x; \quad \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); \quad \frac{e^{-x}}{2-x}; \quad \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$x^2 \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$$

$$x^3 \ln(\operatorname{arctg} 2x); \quad e^{-3x^2} \cdot \cos(\ln 2x); \quad \sqrt{x^2+1} \operatorname{arctg}(\sin 2x); \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right); \quad \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x;$$

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right); \quad |\operatorname{arctg} x|; \quad |\operatorname{arctg}^3 x|;$$